

NOTA I. Diamo qui un esempio di dimostrazione fondata sul principio di coerenza. Consideriamo un soggetto T, il quale scommette su un evento aleatorio E. Supponiamo che egli abbia attribuito all'evento in parola una probabilita' valutata con un numero p; osserviamo che, con cio' stesso, T accetta la valutazione della probabilita' dell'evento -E con il numero $q = 1-p$. Supponiamo poi che all'evento -E il soggetto T, in un'altra scommessa con lo stesso avversario C o con altri, valuti con il numero q' la probabilita' dell'evento -E, mentre gli altri contraenti valutano con il numero p' la probabilita' dell'evento E.

Si puo' far vedere che, a norma del principio di coerenza, si deve avere:

$$(1) \quad p=p' \quad \text{e quindi} \quad q=q'.$$

Possiamo infatti prendere in considerazione la seguente tabella di poste e di eventuali vincite:

Evento	Posta di T	Posta degli altri	Vincita
E	$p*S$	$q*S$	S
-E	$q'*S'$	$p'*S'$	S'

Vogliamo dimostrare condizione necessaria e sufficiente perche' il principio di coerenza sia rispettato e' che si abbia:

$$(2) \quad q'=q \quad \text{ossia} \quad p+q'=1.$$

Invero se la (2) non e' rispettata, si puo' escogitare un sistema di scommesse in cui uno degli avversari e' sicuro di vincere o di perdere. Sia infatti, per esempio:

$$(3) \quad q' > 1-p \quad \text{ossia} \quad p+q' > 1.$$

In questo caso il sistema di scommesse in cui e' $S=S'$ porta ad una situazione in cui T perde di sicuro: egli infatti deve pagare le poste:

$$(4) \quad pS+q'S' = (p+q')S$$

e vince al massimo S; la situazione inversa si ha nel caso in cui e'

$$(5) \quad p+q' < 1.$$

Viceversa si ha che se la (2) e' rispettata nessuno, ne' T ne' i suoi avversari, e' sicuro di vincere o di perdere. Supponiamo infatti che si abbia per esempio:

$$(6) \quad S = S';$$

in questo caso si dimostra che e':

$$(7) \quad S = (p+q')*S = p*S + q'*S' = (p+q')*S' = S';$$

in altre parole, la posta pagata da T, data da $pS+q'S'$ non supera il maggiore e non e' minore del minore dei due numeri S ed S', che rappresentano le due vincite nei casi in cui si verifichi rispettivamente E oppure -E.

NOTA II . La opportunita' di soppesare accuratamente se sia lecito supporre che tutti i casi possibili siano ugualmente possibili per dare delle valutazioni ponderate della probabilita' a priori e' confermata (se mai fosse necessario) da molti esempi di valutazioni errate, le quali possono anche fondare del comportamenti disonesti di certi scommettitori, a danno di altri meno avveduti di loro.

Un esempio molto semplice e classico e' fornito dalla scommessa seguente:

Siano date due monete, che vengono lanciate contemporaneamente; i casi possibili sono tre: 1) Testa, Testa ; 2) Croce, Croce; 3) Testa, Croce. Con un primo superficiale esame si potrebbe pensare di attribuire ad ognuno di essi la valutazione di probabilita' $1/3$. Ma un attento esame porta a concludere che essi non sono tutti ugualmente possibili: infatti, mentre i casi 1 e 2 possono essere realizzati ognuno in un solo modo, il caso 3 puo' essere realizzato in due modi diversi. Il che si rende evidente quando si distinguano in qualche modo le due monete, per esempio segnandole con colori diversi, o lasciandole cadere non contemporaneamente. Lo scommettitore disonesto, in questo gioco ed in altre sue numerose varianti, scommette sul caso 3, e pretende di pagare una posta uguale ad $1/3$ della somma che si puo' vincere, mentre dovrebbe pagare di piu', cioe' $2/4=1/2$ della somma stessa, perche' la scommessa sia equa.

Osserviamo che molti esercizi, che vengono presentati nei manuali come problemi di Calcolo delle Probabilita', si riducono ad accertamenti accurati della clausola della "uguale possibilita'" dei casi presentati come possibili; clausola che, come e' stato detto, e' fondamentale per una esatta valutazione della probabilita' a priori.